# 数字信号处理

## -三角插值

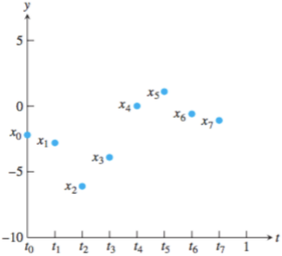
October 28, 2020

# 本节概要

# 三角插值

我们这一节中介绍离散傅立叶变换在插值和数据最小二乘拟合中的应用。

首先考虑插值。假设我们对区间 $[c,d]$ 进行 $n$ 等分，$t_j = c + j\Delta t$，$j = 0,\ldots,n-1$ 是除右端点之外的所有等分点，其中 $\Delta t = \frac{d-c}{n}$。如果 $t$ 代表时间，我们可以将 $x_j$ 考虑为在 $t_j$ 时刻接收到的信号。可以见下面的示意图。



# 离散傅立叶变换的矩阵形式

我们称以下矩阵为傅立叶变换矩阵

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & \cdots & \omega^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中 $\omega = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$，与之前所定义的 $w = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ 正好共轭。

# 三角插值

令 $y = F_n x$ 是向量 $x$ 的离散傅立叶变换。由于 $x$ 又是 $y$ 的离散傅立叶逆变换，因此我们可以将 $x$ 的分量 $x_j$ 写为（利用 $\frac{j}{n} = \frac{t_j - c}{d - c}$）

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} y_k (w^{-k})^j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} y_k e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}kj} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{e^{\mathrm{i}2\pi k \frac{t_j - c}{d - c}}}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

通过上面的式子我们可以看到，如果我们将

$$\frac{e^{\mathrm{i}2\pi k \frac{t - c}{d - c}}}{\sqrt{n}}, \tag{3}$$

作为第 $k$ 个插值基函数，那么

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{e^{\mathrm{i}2\pi k \frac{t - c}{d - c}}}{\sqrt{n}}, \tag{4}$$

恰好对点 $(t_j, x_j)$ 进行了插值，而 $x$ 的离散傅立叶变换 $y$ 的各分量正好是第 $k$ 个插值基函数前面的系数。

# 离散傅立叶变换插值定理

**Theorem 1 (离散傅立叶变换插值定理)**

给定区间 $[c,d]$ 以及正数 $n$，令 $t_j = c + j\frac{d-c}{n}$，$j = 0, \ldots, n-1$，令 $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]$ 是由 $n$ 个数（实数或者复数）组成的向量。设 $a + \mathrm{i}b = F_n x$，其中 $F_n$ 是离散傅立叶变换矩阵。那么函数

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + \mathrm{i}b_k) e^{\mathrm{i}2\pi k \frac{t-c}{d-c}} \tag{5}$$

满足 $Q(t_j) = x_j$，$j = 0, \ldots, n-1$。进一步的，如果 $x_j$ 是实数，则以下实值函数

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left( a_k \cos \frac{2\pi k(t-c)}{d-c} - b_k \sin \frac{2\pi k(t-c)}{d-c} \right) \tag{6}$$

满足 $P(t_j) = x_j$，$j = 0, \ldots, n-1$。

# 离散傅立叶变换插值定理

定理1的证明.

□

# 离散傅立叶变换插值定理

根据离散傅立叶变换的性质，我们可以进一步简化上式中系数的的计算，事实上，如果 $n = 2m$ 是一个偶数，我们只需要计算 $k = 0, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ 时 $a_k$ 和 $b_k$ 的值，即可得到满足 $P(t_j) = x_j$, $j = 0, \ldots, n-1$ 的另外一个 $P$ 的表达式。

我们首先给出两个引理

**Lemma 2**

令 $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$ 是 $\{x_j\}_{j=0}^{n-1}$ 的离散傅立叶变换，且 $x_j$ 是实数，则

1. $y_0$ 是实数；
2. $y_{n-k} = \overline{y}_k, k = 1, \ldots, n-1$。

**Lemma 3**

令 $z_j = \frac{j}{n}$，其中 $j$ 和 $n$ 为整数。令 $k$ 也为一个整数。那么我们有

$$\cos 2(n-k)\pi z_j = \cos 2k\pi z_j, \quad \sin 2(n-k)\pi z_j = -\sin 2k\pi z_j. \tag{7}$$

# 离散傅立叶变换插值定理

我们进而有以下定理。

**Theorem 4 (离散傅立叶变换插值定理)**

*假设 $n$ 是一个偶数，令 $t_j = c + j\frac{d-c}{n}$，$j = 0, \ldots, n-1$，令 $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]$ 是由 $n$ 个实数组成的向量。设 $a + ib = F_n x$，其中 $F_n$ 是离散傅立叶变换矩阵。那么函数*

$$
\begin{aligned}
P_n(t) = {} & \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left( a_k \cos \frac{2\pi k(t-c)}{d-c} - b_k \sin \frac{2\pi k(t-c)}{d-c} \right) \\
& + \frac{a_{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi(t-c)}{d-c},
\end{aligned} \tag{8}
$$

*满足 $P_n(t_j) = x_j$.*

# 离散傅立叶变换插值定理

**定理4的证明.**

$\square$

# 离散傅立叶变换插值定理

**Remark 1.**

1. *我们注意到，定理1中的* $P(t)$ *和定理4中的* $P_n(t)$ *是不同的函数，而并非是定理4中的* $P_n(t)$ *是定理1中的* $P(t)$ *的化简。但是这两个函数都满足* $P(t_j) = x_j$*，* $j = 0, \ldots, n-1$*。这说明与多项式插值不同，三角插值并没有唯一性。*
2. *因为计算方便，我们一般使用的是定理4中的插值函数，并称这个插值公式为* $n$ *次的三角插值函数。*

# 三角插值举例

**Example 5**

对序列 $x = [-2.2, -2.8, -6.1, -3.9, 0.0, 1.1, -0.6, -1.1]$ 在 $[0, 1]$ 上进行插值（这是周期性数据的插值问题，数据对应着一天不同时刻的气温）。

首先找到 $x$ 的离散傅立叶变换 (via $FFT$)[1]

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \left( \left\{ y_k = \frac{1}{\sqrt{7}} \sum_{j=0}^{7} x_j w^{jk} \right\}_{k=0}^{7} \right) = \begin{bmatrix} -5.5154 \\ -1.0528 + 3.6195\,i \\ 1.5910 - 1.1667\,i \\ -0.5028 - 0.2695\,i \\ -0.7778 \\ -0.5028 + 0.2695\,i \\ 1.5910 + 1.1667\,i \\ -1.0528 - 3.6195\,i \end{bmatrix} \tag{9}$$

[1] notice the different definition of DFT in matlab: coefficent: $1/\sqrt{n}$

# 三角插值举例

根据三角插值公式，我们只需要前一半的傅立叶变换系数，可以得到

$$
\begin{aligned}
P_8(t) = & \frac{-5.5154}{\sqrt{8}} - \frac{1.0528}{\sqrt{2}} \cos 2\pi t - \frac{3.6195}{\sqrt{2}} \sin 2\pi t \\
& + \frac{1.5910}{\sqrt{2}} \cos 4\pi t + \frac{1.1667}{\sqrt{2}} \sin 4\pi t \\
& - \frac{0.5028}{\sqrt{2}} \cos 6\pi t + \frac{0.2695}{\sqrt{2}} \sin 6\pi t \\
& - \frac{0.7778}{\sqrt{8}} \cos 8\pi t \\
= & -1.95 - 0.7445 \cos 2\pi t - 2.5594 \sin 2\pi t \\
& + 1.125 \cos 4\pi t + 0.825 \sin 4\pi t \\
& - 0.3555 \cos 6\pi t + 0.1906 \sin 6\pi t \\
& - 0.2750 \cos 8\pi t.
\end{aligned}
$$

# 三角插值举例

插值效果如下图