数字信号处理

-傅立叶级数：点收敛

September 21, 2020

本节概要

Riemann-Lebesgue 引理

Lemma 1 (（强条件下的）Riemann-Lebesgue 引理)

设 f 是 $[a,b]$ 上的连续可微函数，有以下等式成立

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1}$$

Proof.

□

Riemann-Lebesgue 引理

事实上，我们可以在更弱的条件下证明 Riemann-Lebesgue 引理。

Lemma 2 (Riemann-Lebesgue 引理)

设 f 是 $[a,b]$ 上的分段连续函数，有以下等式成立

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2}$$

傅立叶级数在函数连续并有导数点处的收敛性

Theorem 3 (傅立叶级数在连续并有导数点处的收敛性定理)

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数，如果 f 的导数在 x 点处有定义，则 f 的傅立叶级数在 x 点处收敛于 $f(x)$。

定理3的证明.

$\square$

傅立叶级数在函数间断点处的收敛性

Definition 4 (左右极限和左右可微)

我们有以下定义:

- f 在点 x 处的左右极限定义如下:

$$\text{左极限:}\quad f(x-0) := \lim_{h\to 0+} f(x-h) \tag{3}$$

$$\text{右极限:}\quad f(x+0) := \lim_{h\to 0+} f(x+h) \tag{4}$$

- 如果下列极限存在:

$$f'(x-0) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(x-h)-f(x-0)}{h}, \tag{5}$$

$$f'(x+0) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}, \tag{6}$$

则分别称函数 f 是左可微和右可微的。

傅立叶级数在函数间断点处的收敛性

Theorem 5 (傅立叶级数在函数间断点处的收敛性)

设 $f(x)$ 是周期性分段连续函数，设在 x 点处，f 左右可微（但未必连续），则 f 的傅立叶级数在 x 点处收敛于

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{7}$$

定理5的证明.

$\square$